Próbna matura rozszerzona (jesień 2014 r.)

Zadanie 17 — uogólnienie

Wojciech Guzicki

Zadanie 17. Dany jest okrąg o_0 o równaniu $(x-3)^2+(y-1)^2=1$. W pierwszej „ćwiartce” układu współrzędnych istnieją dwa okręgi o_1 i o_2 styczne zewnętrznie do okręgu o_0 i jednocześnie styczne do obu osi układu współrzędnych. Oblicz odległość środków okręgów o_1 i o_2.

Rozwiązanie. Rozwiążemy zadanie w postaci ogólnej. Przypuśćmy, że dany jest okrąg o_0 o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu c. Ze względu na symetrię możemy założyć, że $a\leq b$. Przyjmijmy ponadto, że środek S nie leży na prostej o równaniu $y=x$. Zatem zakładamy, że $a<b$. Chcemy ponadto, by ten okrąg był w całości zawarty w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Mamy zatem nierowności $0<c\leq a<b$.

Niech okrąg zawarty w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, styczny zewnętrznie do okręgu o_0 i styczny do obu osi układu, ma środek w punkcie o współrzędnych (r,r); jego promień jest oczywiście równy r. Warunek styczności zewnętrznej prowadzi do równania z niewiadomą r:

$$(r-a)^2+(r-b)^2=(r+c)^2.$$

Przekształcamy to równanie w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}r^2-2ar+a^2+r^2-2br+b^2=r^2+2cr+c^2,\\ r^2-2(a+b+c)r+a^2+b^2-c^2=0.\end{gathered}$$

Obliczamy wyróżnik tego równania:

$$\begin{aligned}\Delta&=4(a+b+c)^2-4(a^2+b^2-c^2)=\\ &=4\cdot(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-a^2-b^2+c^2)=\\ &=8\cdot(ab+ac+bc+c^2)=8(a+c)(b+c).\end{aligned}$$

Ponieważ liczby a, b i c są dodatnie, więc $\Delta>0$. Nasze równanie ma zatem dwa rozwiązania:

$$r_1=\frac{2(a+b+c)-\sqrt{\Delta}}{2}=a+b+c-\sqrt{2(a+c)(b+c)}$$

oraz

$$r_2=\frac{2(a+b+c)+\sqrt{\Delta}}{2}=a+b+c-\sqrt{2(a+c)(b+c)}.$$

Odległość środków obu okręgów jst zatem równa

$$(r_2-r_1)\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{(a+c)(b+c)}.$$

Naturalnym wymaganiem przy układaniu zadań matematycznych jest to, by zarówno dane (tzn. liczby a, b i c) jak i wyniki (tzn. współrzędne środków obu znalezionych okręgów, czyli rozwiązania otrzymanego równania kwadratowego) były liczbami całkowitymi. Jest to możliwe wtedy, gdy wyróżnik Δ jest kwadratem liczby całkowitej. Zauważmy ponadto, że jeśli a, b i c są liczbami całkowitymi, to Δ jest liczbą parzystą. Chcemy zatem, by Δ była kwadratem liczby parzystej:

$$\Delta = 8(a + c)(b + c) = (2m)^2$$

dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m. Mamy wówczas:

$$r_1 = \frac{2(a+b+c) - 2m}{2} = a+b+c-m \quad \text{oraz} \quad r_2 = \frac{2(a+b+c) + 2m}{2} = a+b+c+m.$$

Stąd $r_2 - r_1 = 2m$ i szukana odległość jest równa $2m\sqrt{2}$.

Zobaczmy zatem, jak można znaleźć takie liczby całkowite a, b i c, by $\Delta = (2m)^2$. Chcemy więc, by

$$8(a + c)(b + c) = 4m^2,$$

czyli

$$2(a + c)(b + c) = m^2$$

dla pewnej liczby całkowitej m. Oczywiście liczba m też jest parzysta: $m = 2n$. Mamy zatem

$$2(a + c)(b + c) = (2n)^2,$$

czyli

$$(a + c)(b + c) = 2n^2.$$

Ponieważ z przyjętych założeń $1 \leq c \leq a < b$ wynika, że

$$a + c \geq 2 \quad \text{oraz} \quad b + c \geq 3,$$

więc $(a+c)(b+c) \geq 6$. Stąd dostajemy $2n^2 \geq 6$, a więc możemy przyjąć, że $n \geq 2$. Teraz dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 2$ obliczamy $2n^2$, znajdujemy wszystkie rozkłady tej liczby na iloczyn różnych liczb większych od 1 i dla każdego takiego rozkładu znajdujemy a, b i c. Zobaczmy to na przykładzie.

Niech $n = 6$. Mamy wówczas równość

$$(a + c)(b + c) = 2 \cdot 6^2 = 72.$$

Liczba 72 ma 5 interesujących nas rozkładów na iloczyn dwóch liczb (dla przypomnienia: $2 \leq a + c < b + c$):

$$72 = 2 \cdot 36 = 3 \cdot 24 = 4 \cdot 18 = 6 \cdot 12 = 8 \cdot 9.$$

Zbadamy dla przykładu dwa takie rozkłady. Niech piewszym będzie $72 = 2 \cdot 36$. Mamy zatem

$$a + c = 2 \quad \text{oraz} \quad b + c = 36.$$

Z pierwszego równania wynika, że $a = 1$ oraz $c = 1$ i wtedy z drugiego równania dostajemy $b = 35$. Otrzymaliśmy zatem okrąg o środku w punkcie $S = (1, 35)$ i promieniu równym 1.

Weźmy teraz rozkład $72 = 6 \cdot 12$. Mamy zatem

$$a + c = 6 \quad \text{oraz} \quad b + c = 12.$$

Z pierwszego równania wynika, że mamy 3 możliwości:

$$\begin{aligned} a &= 5, \quad c = 1, \\ a &= 4, \quad c = 2, \\ a &= 3, \quad c = 3. \end{aligned}$$

Dla każdego c z drugiego równania obliczamy b:

$$\begin{aligned} a &= 5, \quad b = 11, \quad c = 1, \\ a &= 4, \quad b = 10, \quad c = 2, \\ a &= 3, \quad b = 9, \quad c = 3. \end{aligned}$$

W pierwszym przypadku mamy okrąg o środku $S = (5, 11)$ i promieniu równym 1. W drugim przypadku mamy okrąg o środku $S = (4, 10)$ i promieniu równym 2. Wreszcie w trzecim przypadku mamy okrąg o środku $S = (3, 9)$ i promieniu równym 3. Znalezienie w każdym przypadku środków okręgów stycznych do danego okręgu jest już łatwym ćwiczeniem.

Liczby a, b i c oraz odpowiadające im promienie obu okręgów stycznych dla kilku początkowych wartości n (tzn. dla $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$) są zebrane w następującej tabelce.

n	$2n^2$	rozkład	a	b	c	r_1	r_2	odl. środków
2	8	$2 \cdot 4$	1	3	1	1	9	$8\sqrt{2}$
3	18	$2 \cdot 9$	1	8	1	4	16	$12\sqrt{2}$
3	18	$3 \cdot 6$	2	5	1	2	14	$12\sqrt{2}$
4	32	$2 \cdot 16$	1	15	1	9	25	$16\sqrt{2}$
4	32	$4 \cdot 8$	3	7	1	3	19	$16\sqrt{2}$
4	32	$4 \cdot 8$	2	6	2	2	18	$16\sqrt{2}$
5	50	$2 \cdot 25$	1	49	1	41	61	$20\sqrt{2}$
5	50	$5 \cdot 10$	4	9	1	4	24	$20\sqrt{2}$
5	50	$5 \cdot 10$	3	8	2	3	23	$20\sqrt{2}$
6	72	$2 \cdot 36$	1	35	1	25	49	$24\sqrt{2}$
6	72	$3 \cdot 24$	2	23	1	14	38	$24\sqrt{2}$
6	72	$4 \cdot 18$	3	17	1	9	33	$24\sqrt{2}$
6	72	$4 \cdot 18$	2	16	2	8	32	$24\sqrt{2}$
6	72	$6 \cdot 12$	5	11	1	5	29	$24\sqrt{2}$
6	72	$6 \cdot 12$	4	10	2	4	28	$24\sqrt{2}$
6	72	$6 \cdot 12$	3	9	3	3	27	$24\sqrt{2}$
6	72	$8 \cdot 9$	7	8	1	4	28	$24\sqrt{2}$
6	72	$8 \cdot 9$	6	7	2	3	27	$24\sqrt{2}$
6	72	$8 \cdot 9$	5	6	3	2	26	$24\sqrt{2}$
6	72	$8 \cdot 9$	4	5	4	1	25	$24\sqrt{2}$